SET-3

Series SSO

कोड नं.
Code No. **65/3/C**

रोल नं.
Roll No. | | | | | | | |

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।
Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **26** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **26** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।

(ii) कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न–पत्र में **26** प्रश्न हैं ।

(iii) खण्ड अ के प्रश्न **1 – 6** तक अति लघु-उत्तर वाले प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **1** अंक निर्धारित है ।

(iv) खण्ड ब के प्रश्न **7 – 19** तक दीर्घ-उत्तर I प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **4** अंक निर्धारित हैं ।

(v) खण्ड स के प्रश्न **20 – 26** तक दीर्घ-उत्तर II प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए **6** अंक निर्धारित हैं ।

(vi) उत्तर लिखना प्रारम्भ करने से पहले कृपया प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखिए ।

General Instructions :

(i) ***All** questions are compulsory.*

(ii) *Please check that this question paper contains **26** questions.*

(iii) *Questions **1 – 6** in Section A are very short-answer type questions carrying **1** mark each.*

(iv) *Questions **7 – 19** in Section B are long-answer I type questions carrying **4** marks each.*

(v) *Questions **20 – 26** in Section C are long-answer II type questions carrying **6** marks each.*

(vi) *Please write down the serial number of the question before attempting it.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 6 तक प्रत्येक प्रश्न का 1 अंक है ।

Question numbers 1 to 6 carry 1 mark each.

1. सदिशों $\hat{i} - \hat{j}$ तथा $\hat{j} - \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए ।

Find the angle between the vectors $\hat{i} - \hat{j}$ and $\hat{j} - \hat{k}$.

2. बिन्दु (2, 5, – 3) की समतल $\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$ से दूरी ज्ञात कीजिए ।

Find the distance of a point (2, 5, – 3) from the plane
$\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$.

3. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ है, तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ज्ञात कीजिए ।

If $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$, then find $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

4. मूल बिन्दु से गुज़रने वाली रेखाओं के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the differential equation of the family of lines passing through the origin.

5. निम्न अवकल समीकरण का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए :

$$x \log x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$$

Find the integrating factor for the following differential equation :

$$x \log x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$$

6. एक आव्यूह $A = [a_{ij}]_{2\times2}$ जिसके अवयव $a_{ij} = e^{2ix} \sin jx$ द्वारा प्रदत्त हैं, का अवयव a_{12} लिखिए ।

Write the element a_{12} of the matrix $A = [a_{ij}]_{2\times2}$, whose elements a_{ij} are given by $a_{ij} = e^{2ix} \sin jx$.

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 7 से 19 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

Question numbers 7 to 19 carry 4 marks each.

7. यदि $y = e^{ax} . \cos bx$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)\, y = 0$$

If $y = e^{ax} . \cos bx$, then prove that

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)\, y = 0$$

8. यदि $x^x + x^y + y^x = a^b$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

If $x^x + x^y + y^x = a^b$, then find $\frac{dy}{dx}$.

9. यदि $x = a \sin 2t\,(1 + \cos 2t)$ तथा $y = b \cos 2t\,(1 - \cos 2t)$ है, तो $t = \frac{\pi}{4}$ पर $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

If $x = a \sin 2t\,(1 + \cos 2t)$ and $y = b \cos 2t\,(1 - \cos 2t)$, then find $\frac{dy}{dx}$ at $t = \frac{\pi}{4}$.

10. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{(x+3)\, e^x}{(x+5)^3}\, dx$$

Evaluate :

$$\int \frac{(x+3)\, e^x}{(x+5)^3}\, dx$$

11. तीन विद्यालय X, Y तथा Z बाढ़ पीड़ितों की सहायता के लिए फंड एकत्रित करने के लिए एक मेला लगाते हैं जिसमें बच्चों द्वारा पुनःचक्रित सामग्री से बनाए गए हाथ पंखे, चटाइयाँ तथा खिलौने बेचे जाते हैं, जिनमें से प्रत्येक का मूल्य क्रमशः ₹ 25, ₹ 100 तथा ₹ 50 है । निम्न तालिका मेले में बेची गई सामग्री की संख्या दर्शाती है :

विद्यालय / सामग्री	X	Y	Z
हाथ पंखे	30	40	35
चटाइयाँ	12	15	20
खिलौने	70	55	75

आव्यूहों के प्रयोग से उपरोक्त सामग्री की बिक्री से प्रत्येक विद्यालय द्वारा एकत्रित फंड ज्ञात कीजिए तथा कुल एकत्रित फंड भी ज्ञात कीजिए । उपरोक्त से जनित कोई एक मूल्य भी लिखिए ।

Three schools X, Y and Z organized a fete (mela) for collecting funds for flood victims in which they sold hand-held fans, mats and toys made from recycled material, the sale price of each being ₹ 25, ₹ 100 and ₹ 50 respectively. The following table shows the number of articles of each type sold :

School / Article	X	Y	Z
Hand-held fans	30	40	35
Mats	12	15	20
Toys	70	55	75

Using matrices, find the funds collected by each school by selling the above articles and the total funds collected. Also write any one value generated by the above situation.

12. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x^2}{x^4 + x^2 - 2}\, dx$$

Evaluate :

$$\int \frac{x^2}{x^4 + x^2 - 2}\, dx$$

13. 10 सिक्कों के समूह में 2 सिक्के ऐसे हैं जिनके दोनों ओर चित हैं । इस समूह में से एक सिक्का यादृच्छया निकाल कर 5 बार उछाला गया । यदि पाँचों बार चित प्राप्त हुआ हो, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुने गए सिक्के के दोनों ओर चित था ।

अथवा

एक न्याय्य सिक्के को कितनी बार उछाला जाए कि कम-से-कम एक बार चित आने की प्रायिकता 80% से अधिक हो ?

In a set of 10 coins, 2 coins are with heads on both the sides. A coin is selected at random from this set and tossed five times. If all the five times, the result was heads, find the probability that the selected coin had heads on both the sides.

OR

How many times must a fair coin be tossed so that the probability of getting at least one head is more than 80% ?

14. x का वह मान ज्ञात कीजिए जिससे कि चार बिन्दु A(4, 1, 2), B(5, x, 6), C(5, 1, – 1) तथा D(7, 4, 0) समतलीय हैं ।

Find x such that the four points A(4, 1, 2), B(5, x, 6), C(5, 1, – 1) and D(7, 4, 0) are coplanar.

15. स्थिति सदिश $\vec{a} = 4\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ वाले बिन्दु A से होकर गुज़रती एक रेखा, सदिश $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ के समान्तर है । बिन्दु P जिसका स्थिति सदिश $\vec{r_1} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ है, से इस रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए ।

A line passing through the point A with position vector $\vec{a} = 4\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ is parallel to the vector $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$. Find the length of the perpendicular drawn on this line from a point P with position vector $\vec{r_1} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$.

16. निम्न को x के लिए हल कीजिए :

$$\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

Solve the following for x :

$$\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

अथवा

दिखाइए कि :

$$2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{17}{31}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Show that :

$$2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{17}{31}\right) = \frac{\pi}{4}$$

17. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो दिखाइए कि $A^2 - 4A - 5I = O$, फलस्वरूप A^{-1} भी ज्ञात कीजिए ।

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ है, तो प्रारम्भिक पंक्ति संक्रियाओं का प्रयोग करके A^{-1} ज्ञात कीजिए ।

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, then show that $A^2 - 4A - 5I = O$, and hence find A^{-1}.

OR

If $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, then find A^{-1} using elementary row operations.

18. सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से निम्न को x के लिए हल कीजिए :

$$\begin{vmatrix} x+2 & x+6 & x-1 \\ x+6 & x-1 & x+2 \\ x-1 & x+2 & x+6 \end{vmatrix} = 0$$

Using the properties of determinants, solve the following for x :

$$\begin{vmatrix} x+2 & x+6 & x-1 \\ x+6 & x-1 & x+2 \\ x-1 & x+2 & x+6 \end{vmatrix} = 0$$

19. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

अथवा

योगफल की सीमा के रूप में $\int_{-1}^{2} (e^{3x} + 7x - 5)\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

Evaluate :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

OR

Evaluate $\int_{-1}^{2} (e^{3x} + 7x - 5)\, dx$ as a limit of sums.

खण्ड स

SECTION C

प्रश्न संख्या 20 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 20 to 26 carry 6 marks each.

20. निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $z = 5x + 2y$ का न्यूनतमीकरण तथा अधिकतमीकरण कीजिए :

$$x - 2y \le 2$$
$$3x + 2y \le 12$$
$$-3x + 2y \le 3$$
$$x \ge 0, y \ge 0$$

Minimise and maximise $z = 5x + 2y$ subject to the following constraints :

$$x - 2y \le 2$$
$$3x + 2y \le 12$$
$$-3x + 2y \le 3$$
$$x \ge 0, y \ge 0$$

21. प्रथम छ: धन पूर्णांकों में से दो संख्याएँ यादृच्छया (बिना प्रतिस्थापन) चुनी गईं । मान लीजिए X दोनों संख्याओं में से बड़ी संख्या को व्यक्त करता है, तो X का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए । इस बंटन का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए ।

Two numbers are selected at random (without replacement) from first six positive integers. Let X denote the larger of the two numbers obtained. Find the probability distribution of X. Find the mean and variance of this distribution.

22. माना $A = Q \times Q$ है, जहाँ Q सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय है, तथा एक द्विआधारी संक्रिया $*$ A पर इस प्रकार परिभाषित है कि, $(a, b), (c, d) \in A$ के लिए $(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad)$ है । तो

(i) $*$ का A में तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए ।

(ii) A के व्युत्क्रमणीय अवयव ज्ञात कीजिए, अत: अवयवों (5, 3) तथा $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ के व्युत्क्रम लिखिए ।

अथवा

मान लीजिए कि $f : W \to W$,

$$f(n) = \begin{cases} n-1, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \\ n+1, & \text{यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है । दर्शाइए कि f व्युत्क्रमणीय है । f का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए । यहाँ W समस्त पूर्ण संख्याओं का समुच्चय है ।

Let A = Q × Q, where Q is the set of all rational numbers, and $*$ be a binary operation on A defined by $(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad)$ for $(a, b), (c, d) \in A$. Then find

(i) The identity element of $*$ in A.

(ii) Invertible elements of A, and hence write the inverse of elements (5, 3) and $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

OR

Let $f : W \to W$ be defined as

$$f(n) = \begin{cases} n-1, & \text{if } n \text{ is odd} \\ n+1, & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

Show that f is invertible and find the inverse of f. Here, W is the set of all whole numbers.

23. वक्रों $y = \sqrt{5 - x^2}$ तथा $y = |x - 1|$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र को आलेख द्वारा दर्शाइए तथा समाकलन के प्रयोग से इस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Sketch the region bounded by the curves $y = \sqrt{5 - x^2}$ and $y = |x - 1|$ and find its area using integration.

24. फलन $f(x) = \sin^2 x - \cos x, x \in [0, \pi]$ के निरपेक्ष उच्चतम मान व निरपेक्ष निम्नतम मान ज्ञात कीजिए ।

Find the absolute maximum and absolute minimum values of the function f given by $f(x) = \sin^2 x - \cos x, x \in [0, \pi]$.

25. दर्शाइए कि रेखाएँ :

$$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

$$\vec{r} = 4\hat{j} + 2\hat{k} + \mu(2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$$ समतलीय हैं ।

इन रेखाओं को अंतर्विष्ट करने वाले समतल का समीकरण भी ज्ञात कीजिए ।

Show that the lines :

$$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

$$\vec{r} = 4\hat{j} + 2\hat{k} + \mu(2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$$ are coplanar.

Also, find the equation of the plane containing these lines.

26. अवकल समीकरण $x^2\,dy = (2xy + y^2)\,dx$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया है कि $y = 1$ जब $x = 1$.

अथवा

अवकल समीकरण $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} = (e^{m\tan^{-1}x} - y)$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया है कि $y = 1$ है जब $x = 0$ है ।

Find the particular solution of the differential equation $x^2\,dy = (2xy + y^2)\,dx$, given that $y = 1$ when $x = 1$.

OR

Find the particular solution of the differential equation $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} = (e^{m\tan^{-1}x} - y)$, given that $y = 1$ when $x = 0$.