SET-2

Series SSO

कोड नं.
Code No. **65/2/RU**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **12** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **26** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **12** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **26** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न–पत्र में* ***26*** *प्रश्न हैं ।*

(iii) *खण्ड अ के प्रश्न* ***1 – 6*** *तक अति लघु-उत्तर वाले प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए* ***1*** *अंक निर्धारित है ।*

(iv) *खण्ड ब के प्रश्न* ***7 – 19*** *तक दीर्घ-उत्तर I प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए* ***4*** *अंक निर्धारित हैं ।*

(v) *खण्ड स के प्रश्न* ***20 – 26*** *तक दीर्घ-उत्तर II प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए* ***6*** *अंक निर्धारित हैं ।*

(vi) *उत्तर लिखना प्रारम्भ करने से पहले कृपया प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखिए ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *Please check that this question paper contains* ***26*** *questions.*

(iii) *Questions* ***1 – 6*** *in Section A are very short-answer type questions carrying* ***1*** *mark each.*

(iv) *Questions* ***7 – 19*** *in Section B are long-answer I type questions carrying* ***4*** *marks each.*

(v) *Questions* ***20 – 26*** *in Section C are long-answer II type questions carrying* ***6*** *marks each.*

(vi) *Please write down the serial number of the question before attempting it.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 6 तक प्रत्येक प्रश्न का 1 अंक है ।

Question numbers 1 to 6 carry 1 mark each.

1. यदि $\hat{a}$, $\hat{b}$ और $\hat{c}$ परस्पर लम्बवत् मात्रक सदिश हों, तो $|2\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}|$ का मान ज्ञात कीजिए ।

If $\hat{a}$, $\hat{b}$ and $\hat{c}$ are mutually perpendicular unit vectors, then find the value of $|2\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}|$.

2. एक मात्रक सदिश लिखिए जो सदिशों $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$ दोनों के लम्बवत् हो ।

Write a unit vector perpendicular to both the vectors $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$.

3. एक रेखा के समीकरण $5x - 3 = 15y + 7 = 3 - 10z$ हैं । इस रेखा के दिक् कोज्या (direction cosines) लिखिए ।

The equations of a line are $5x - 3 = 15y + 7 = 3 - 10z$. Write the direction cosines of the line.

4. $\Delta = \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

Write the value of $\Delta = \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$.

5. निम्न अवकल समीकरण की कोटि व घात का योगफल लिखिए :

$$\frac{d}{dx}\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right\} = 0$$

Write the sum of the order and degree of the following differential equation :

$$\frac{d}{dx}\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right\} = 0$$

6. निम्न अवकल समीकरण का समाकलन गुणक लिखिए :

$$(1 + y^2) + (2xy - \cot y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Write the integrating factor of the following differential equation :

$$(1 + y^2) + (2xy - \cot y)\frac{dy}{dx} = 0$$

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 7 से 19 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

Question numbers 7 to 19 carry 4 marks each.

7. आव्यूह $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ का सहखंडज ज्ञात कीजिए ।

अत: दर्शाइए कि $A \cdot (\text{adj } A) = |A| I_3$.

Find the adjoint of the matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ and hence show that $A \cdot (\text{adj } A) = |A| I_3$.

8. दर्शाइए कि सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए फलन $f(x) = |x-1| + |x+1|$, बिन्दुओं $x = -1$ तथा $x = 1$ पर अवकलनीय नहीं है ।

Show that the function $f(x) = |x-1| + |x+1|$, for all $x \in \mathbb{R}$, is not differentiable at the points $x = -1$ and $x = 1$.

9. यदि $y = e^{m \sin^{-1} x}$ है, तो दर्शाइए कि $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - m^2y = 0.$

If $y = e^{m \sin^{-1} x}$, then show that $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - m^2y = 0.$

10. यदि $f(x) = \sqrt{x^2+1}$; $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ तथा $h(x) = 2x - 3$ है, तो $f'[h'\{g'(x)\}]$ ज्ञात कीजिए ।

If $f(x) = \sqrt{x^2+1}$; $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ and $h(x) = 2x - 3$, then find $f'[h'\{g'(x)\}]$.

11. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int (3-2x) \cdot \sqrt{2+x-x^2}\, dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)}\, dx$$

Evaluate :

$$\int (3-2x) \cdot \sqrt{2+x-x^2}\, dx$$

OR

Evaluate :

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)}\, dx$$

12. स्त्रियों को शौचालय उपलब्ध कराने की सुविधा को प्रोत्साहित करने के लिए एक संस्था ने (i) घर-घर जाकर (ii) पत्रों द्वारा, तथा (iii) ढिंढोरे का सहारा लिया, जिन पर प्रति सम्पर्क व्यय निम्न प्रकार है :

(i) ₹ 50

(ii) ₹ 20

(iii) ₹ 40

तीन गाँवों X, Y तथा Z में किए गए सम्पर्क प्रयासों की संख्या निम्न है :

	(i)	(ii)	(iii)
X	400	300	100
Y	300	250	75
Z	500	400	150

आव्यूहों के प्रयोग से, संस्था द्वारा अलग-अलग गाँवों में किया गया व्यय ज्ञात कीजिए ।
संस्था के इस प्रयास द्वारा समाज में जनित होने वाला एक मूल्य लिखिए ।

To promote the making of toilets for women, an organisation tried to generate awareness through (i) house calls (ii) letters, and (iii) announcements. The cost for each mode per attempt is given below :

(i) ₹ 50

(ii) ₹ 20

(iii) ₹ 40

The number of attempts made in three villages X, Y, and Z are given below :

	(i)	(ii)	(iii)
X	400	300	100
Y	300	250	75
Z	500	400	150

Find the total cost incurred by the organisation for the three villages separately, using matrices.

Write one value generated by the organisation in the society.

13. x के लिए हल कीजिए :

$$\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)=\tan^{-1}\frac{8}{31}$$

अथवा

निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\cot^{-1}\left(\frac{xy+1}{x-y}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{yz+1}{y-z}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{zx+1}{z-x}\right)=0$$

$(0 < xy, yx, zx < 1)$

Solve for x :

$$\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)=\tan^{-1}\frac{8}{31}$$

OR

Prove the following :

$$\cot^{-1}\left(\frac{xy+1}{x-y}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{yz+1}{y-z}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{zx+1}{z-x}\right)=0$$

$(0 < xy, yx, zx < 1)$

14. सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4\,a^2b^2c^2.$$

Using properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4\,a^2b^2c^2.$$

15. सदिशों $(\vec{a} - \vec{b})$ और $(\vec{c} - \vec{b})$ दोनों के लम्बवत् एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$ तथा $\vec{c} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}$.

If $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$ and $\vec{c} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}$, then find a unit vector perpendicular to both of the vectors $(\vec{a} - \vec{b})$ and $(\vec{c} - \vec{b})$.

16. बिन्दु (1, 2, – 4) से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखाओं $\vec{r} = (8\hat{i} - 19\hat{j} + 10\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} - 16\hat{j} + 7\hat{k})$ तथा $\vec{r} = (15\hat{i} + 29\hat{j} + 5\hat{k}) + \mu(3\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k})$ दोनों पर लम्बवत् हो ।

अथवा

बिन्दुओं (– 1, 2, 0) तथा (2, 2, – 1) से गुज़रने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $\frac{x-1}{1} = \frac{2y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ के समान्तर है ।

Find the equation of a line passing through the point (1, 2, – 4) and perpendicular to two lines $\vec{r} = (8\hat{i} - 19\hat{j} + 10\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} - 16\hat{j} + 7\hat{k})$ and $\vec{r} = (15\hat{i} + 29\hat{j} + 5\hat{k}) + \mu(3\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k})$.

OR

Find the equation of the plane passing through the points (–1, 2, 0), (2, 2, –1) and parallel to the line $\frac{x-1}{1} = \frac{2y+1}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

17. ताश के 52 पत्तों की एक सुमिश्रित गड्डी में से 3 पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना के साथ निकाले जाते हैं । हुकुम के पत्तों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए । अत: बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए ।

अथवा

एक प्रयोग के 6 परीक्षण किए गए । माना X एक द्विपद चर है जो सम्बन्ध 9P(X = 4) = P(X = 2) को संतुष्ट करता है । सफलता की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

Three cards are drawn successively with replacement from a well shuffled pack of 52 cards. Find the probability distribution of the number of spades. Hence find the mean of the distribution.

OR

For 6 trials of an experiment, let X be a binomial variate which satisfies the relation 9P(X = 4) = P(X = 2). Find the probability of success.

18. ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^3 x \sqrt{2 \sin 2x}}$$

Find :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^3 x \sqrt{2 \sin 2x}}$$

19. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\log x}{(x+1)^2} \, dx$$

Find :

$$\int \frac{\log x}{(x+1)^2} \, dx$$

खण्ड स

SECTION C

प्रश्न संख्या 20 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 20 to 26 carry 6 marks each.

20. समाकलन विधि से सिद्ध कीजिए कि वक्र $y^2 = 4x$ एवं $x^2 = 4y$, रेखाओं $x = 0$, $x = 4$, $y = 4$ एवं $y = 0$ से घिरे वर्ग के क्षेत्रफल को तीन बराबर भागों में विभाजित करते हैं ।

Using integration, prove that the curves $y^2 = 4x$ and $x^2 = 4y$ divide the area of the square bounded by $x = 0$, $x = 4$, $y = 4$, and $y = 0$ into three equal parts.

21. दिखाइए कि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}$ समघातीय है तथा इसे हल भी कीजिए ।

अथवा

अवकल समीकरण $(\tan^{-1} y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया है कि जब $y = 0$ है तो $x = 1$ है ।

Show that the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}$ is homogeneous and also solve it.

OR

Find the particular solution of the differential equation $(\tan^{-1} y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$, given that $x = 1$ when $y = 0$.

22. बिन्दु P(3, 4, 4) की उस बिन्दु से दूरी ज्ञात कीजिए, जहाँ बिन्दुओं A(3, – 4, – 5) और B(2, –3, 1) से हो कर जाने वाली रेखा समतल $2x + y + z = 7$ को प्रतिच्छेद करती है ।

Find the distance of the point P(3, 4, 4) from the point, where the line joining the points A(3, – 4, – 5) and B(2, – 3, 1) intersects the plane $2x + y + z = 7$.

23. $f(x) = 5x^2 + 6x - 9$ द्वारा प्रदत्त फलन $f : \mathbb{R}_+ \to [-9, \infty]$ पर विचार कीजिए । सिद्ध कीजिए कि फलन f, $f^{-1}(y) = \left(\frac{\sqrt{54 + 5y} - 3}{5}\right)$ के साथ व्युत्क्रमणीय है ।

अथवा

समुच्चय $x = R - \{-1\}$ में एक द्विआधारी संक्रिया $*$ निम्न रूप में परिभाषित है :

$$x * y = x + y + xy, \ \forall\, x, y \in X.$$

जाँच कीजिए कि क्या यह $(*)$ संक्रिया क्रमविनिमेय, तथा साहचर्य है । इस संक्रिया का तत्समक अवयव भी ज्ञात कीजिए तथा X के प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिए ।

Consider $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow [-9, \infty]$ given by $f(x) = 5x^2 + 6x - 9$. Prove that f is invertible with $f^{-1}(y) = \left(\frac{\sqrt{54 + 5y} - 3}{5}\right)$.

OR

A binary operation $*$ is defined on the set $x = R - \{-1\}$ by

$$x * y = x + y + xy, \ \forall x, y \in X.$$

Check whether $*$ is commutative and associative. Find its identity element and also find the inverse of each element of X.

24. p का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए वक्र $x^2 = 9p(9 - y)$ तथा $x^2 = p(y + 1)$ एक-दूसरे को समकोण पर काटते हैं ।

Find the value of p for when the curves $x^2 = 9p(9 - y)$ and $x^2 = p(y + 1)$ cut each other at right angles.

25. एक बोल्ट बनाने के कारखाने में मशीनें (यंत्र) A, B और C कुल उत्पादन के क्रमशः 30%, 50% और 20% बोल्ट बनाती हैं । इन मशीनों के उत्पादन का क्रमशः 3, 4 और 1 प्रतिशत भाग खराब (त्रुटिपूर्ण) होता है । बोल्टों के कुल उत्पादन में से एक बोल्ट यादृच्छया निकाला जाता है और वह खराब पाया जाता है । इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह बोल्ट मशीन B द्वारा नहीं बनाया गया है ।

In a factory which manufactures bolts, machines A, B and C manufacture respectively 30%, 50% and 20% of the bolts. Of their outputs 3, 4 and 1 percent respectively are defective bolts. A bolts is drawn at random from the product and is found to be defective. Find the probability that this is not manufactured by machine B.

26. एक कम्पनी 3 प्रकार के कैलक्युलेटर : A, B तथा C अपनी दो फैक्टरियों I तथा II में तैयार करती है । कम्पनी के पास A प्रकार के कम-से-कम 6400, B प्रकार के कम-से-कम 4000 तथा C प्रकार के कम-से-कम 4800 कैलक्युलेटरों को तैयार करने का अनुबन्ध है । फैक्टरी I में प्रतिदिन प्रकार A के 50 कैलक्युलेटर, प्रकार B के 50 कैलक्युलेटर और प्रकार C के 30 कैलक्युलेटर तैयार होते हैं, जबकि फैक्टरी II में प्रतिदिन प्रकार A के 40 कैलक्युलेटर, प्रकार B के 20 कैलक्युलेटर और प्रकार C के 40 कैलक्युलेटर तैयार होते हैं । फैक्टरी I को चलाने में प्रतिदिन ₹ 12,000 का ख़र्च आता है तथा फैक्टरी II को चलाने में ₹ 15,000 का । प्रत्येक फैक्टरी को कम-से-कम कितने-कितने दिन चलाना होगा, जिससे फैक्टरी चलाने का ख़र्चा न्यूनतम हो, और माँग भी पूरी हो सके । प्रश्न को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ़ द्वारा हल कीजिए ।

A company manufactures three kinds of calculators : A, B and C in its two factories I and II. The company has got an order for manufacturing at least 6400 calculators of kind A, 4000 of kind B and 4800 of kind C. The daily output of factory I is of 50 calculators of kind A, 50 calculators of kind B, and 30 calculators of kind C. The daily output of factory II is of 40 calculators of kind A, 20 of kind B and 40 of kind C. The cost per day to run factory I is ₹ 12,000 and of factory II is ₹ 15,000. How many days do the two factories have to be in operation to produce the order with the minimum cost ? Formulate this problem as an LPP and solve it graphically.