Series : S7PQR

SET~1

प्रश्न-पत्र कोड
Q.P. Code **65/7/1**

रोल नं.
Roll No. | | | | | | | | |

परीक्षार्थी प्रश्न-पत्र कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें।
Candidates must write the Q.P. Code on the title page of the answer-book.

	नोट		**NOTE**
(I)	कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **23** हैं।	(I)	Please check that this question paper contains **23** printed pages.
(II)	प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए प्रश्न-पत्र कोड को परीक्षार्थी उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें।	(II)	Q.P. Code given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
(III)	कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **38** प्रश्न हैं।	(III)	Please check that this question paper contains **38** questions.
(IV)	**कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, उत्तर-पुस्तिका में यथा स्थान पर प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।** [ ]	(IV)	**Please write down the Serial Number of the question in the answer-book at the given place before attempting it.**
(V)	इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है। प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा। 10.15 बजे से 10.30 बजे तक परीक्षार्थी केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे।	(V)	15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the candidates will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

*निर्धारित समय : **3** घण्टे*
*Time allowed : **3** hours*

*अधिकतम अंक : **80***
*Maximum Marks : **80***

सामान्य निर्देश :

निम्नलिखित निर्देशों को बहुत सावधानी से पढ़िए और उनका सख़्ती से पालन कीजिए :

(i) *इस प्रश्न-पत्र में **38** प्रश्न हैं। **सभी** प्रश्न **अनिवार्य** हैं।*

(ii) *यह प्रश्न-पत्र **पाँच** खण्डों में विभाजित है – **क, ख, ग, घ** एवं **ङ**।*

(iii) ***खण्ड क** में प्रश्न संख्या **1** से **18** तक बहुविकल्पीय (MCQ) तथा प्रश्न संख्या **19** एवं **20** अभिकथन एवं तर्क आधारित **1** अंक के प्रश्न हैं।*

(iv) ***खण्ड ख** में प्रश्न संख्या **21** से **25** तक अति लघु-उत्तरीय (VSA) प्रकार के **2** अंकों के प्रश्न हैं।*

(v) ***खण्ड ग** में प्रश्न संख्या **26** से **31** तक लघु-उत्तरीय (SA) प्रकार के **3** अंकों के प्रश्न हैं।*

(vi) ***खण्ड घ** में प्रश्न संख्या **32** से **35** तक दीर्घ-उत्तरीय (LA) प्रकार के **5** अंकों के प्रश्न हैं।*

(vii) ***खण्ड ङ** में प्रश्न संख्या **36** से **38** तक प्रकरण अध्ययन आधारित **4** अंकों के प्रश्न हैं।*

(viii) *प्रश्न-पत्र में समग्र विकल्प नहीं दिया गया है। यद्यपि, खण्ड ख के 2 प्रश्नों में, खण्ड ग के 3 प्रश्नों में, खण्ड घ के 2 प्रश्नों में तथा खण्ड ङ के 2 प्रश्नों में आंतरिक विकल्प का प्रावधान दिया गया है।*

(ix) *कैल्कुलेटर का उपयोग **वर्जित** है।*

खण्ड क

इस खण्ड में बहुविकल्पीय प्रश्न (MCQ) हैं, जिनमें प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $A' + A = I$ को संतुष्ट करता है, तो θ का मान है :

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

2. यदि A एक वर्ग आव्यूह है, तो निम्नलिखित में से कौन-सा सही ***नहीं*** है ?

(A) $A + A'$ एक सममित आव्यूह है

(B) AA' तथा $A'A$ सममित आव्यूह हैं

(C) $A + A'$ एक विषम सममित आव्यूह है

(D) $A - A'$ एक विषम सममित आव्यूह है

General Instructions :

Read the following instructions very carefully and strictly follow them :

(i) *This question paper contains **38** questions. **All** questions are **compulsory**.*

(ii) *This question paper is divided into **five** Sections – **A, B, C, D** and **E**.*

(iii) *In **Section A,** Questions no. **1** to **18** are multiple choice questions (MCQs) and questions number **19** and **20** are Assertion-Reason based questions of **1** mark each.*

(iv) *In **Section B,** Questions no. **21** to **25** are very short answer (VSA) type questions, carrying **2** marks each.*

(v) *In **Section C,** Questions no. **26** to **31** are short answer (SA) type questions, carrying **3** marks each.*

(vi) *In **Section D,** Questions no. **32** to **35** are long answer (LA) type questions carrying **5** marks each.*

(vii) *In **Section E,** Questions no. **36** to **38** are case study based questions carrying **4** marks each.*

(viii) *There is no overall choice. However, an internal choice has been provided in 2 questions in Section B, 3 questions in Section C, 2 questions in Section D and 2 questions in Section E.*

(ix) *Use of calculator is **not** allowed.*

SECTION A

This section comprises multiple choice questions (MCQs) of 1 mark each.

1. If $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ satisfies $A' + A = I$, then the value of θ is :

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

2. If A is a square matrix, then which of the following is ***not*** true ?

(A) $A + A'$ is a symmetric matrix

(B) AA' and $A'A$ are symmetric matrices

(C) $A + A'$ is a skew symmetric matrix

(D) $A - A'$ is a skew symmetric matrix

3. यदि $\begin{vmatrix} 3x & x+2 \\ 3(x-1) & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$ है, तो x का मान है :

(A) 2 (B) $\frac{1}{3}$

(C) 5 (D) 3

4. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right)$ का मान है :

(A) $\frac{3\pi}{5}$ (B) $\frac{\pi}{5}$

(C) $\frac{7\pi}{5}$ (D) $\frac{2\pi}{5}$

5. यदि $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ है, तो निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य ***नहीं*** है ?

(A) सभी $x < 0$ के लिए f संतत है।

(B) सभी $x \in R$ के लिए f संतत है।

(C) सभी $x > 0$ के लिए f संतत है।

(D) $x = 0$ को छोड़कर अन्य सभी बिंदुओं पर f संतत है।

6. $f(x) = -|x+1| + 5$ के लिए, निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है ?

(A) $x = 4$ पर उच्चतम $f(x) = 0$ है।

(B) $x = -1$ पर उच्चतम $f(x) = 5$ है।

(C) $x = 0$ पर उच्चतम $f(x) = 4$ है।

(D) $f(x)$ का कोई उच्चतम मान नहीं है।

7. $[\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)]$ बराबर है :

(A) π (B) $-\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

3. If $\begin{vmatrix} 3x & x+2 \\ 3(x-1) & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$, then the value of x is :

(A) 2 (B) $\frac{1}{3}$

(C) 5 (D) 3

4. The value of $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right)$ is :

(A) $\frac{3\pi}{5}$ (B) $\frac{\pi}{5}$

(C) $\frac{7\pi}{5}$ (D) $\frac{2\pi}{5}$

5. If $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, then which of the following statements is ***not*** correct ?

(A) f is continuous for every $x < 0$.

(B) f is continuous for every $x \in R$.

(C) f is continuous for every $x > 0$.

(D) f is continuous for each point except $x = 0$.

6. For $f(x) = -|x + 1| + 5$, which of the following statements is true ?

(A) Max $f(x) = 0$ at $x = 4$.

(B) Max $f(x) = 5$ at $x = -1$.

(C) Max $f(x) = 4$ at $x = 0$.

(D) f(x) has no maximum value.

7. $[\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)]$ is equal to :

(A) π (B) $-\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

8. यदि A तथा B कोटि 3 के वर्ग आव्यूह इस प्रकार हैं कि $|A| = 4$ तथा $|B| = 7$ है, तो $|2AB|$ बराबर है :

(A) 112 (B) 56

(C) 28 (D) 224

9. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ तथा $C = [C_{ij}] = AB$ है, तो C_{12} है :

(A) 22 (B) – 16

(C) 4 (D) 0

10. $\cos^{-1}(e^x)$ का x के सापेक्ष अवकलज है :

(A) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ (B) $\dfrac{-e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

(C) $\dfrac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ (D) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

11. x के वे मान जिनके लिए $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 7$ के बढ़ने की दर x के बढ़ने की दर की तिगुनी है, हैं :

(A) $-3, -\dfrac{1}{3}$ (B) $3, -\dfrac{1}{3}$

(C) $3, \dfrac{1}{3}$ (D) $-3, \dfrac{1}{3}$

12. यदि $\int_0^1 (9x^2 - 4x - 2k)\,dx = 0$ है, तो 'k' का मान है :

(A) 1 (B) 0

(C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $-\dfrac{1}{2}$

8. If A and B are square matrices of order 3 such that $|A| = 4$ and $|B| = 7$, then $|2AB|$ is :

(A) 112 (B) 56

(C) 28 (D) 224

9. If $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ and $C = [C_{ij}] = AB$, then C_{12} is :

(A) 22 (B) – 16

(C) 4 (D) 0

10. Differential of $\cos^{-1}(e^x)$ with respect to x is :

(A) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ (B) $\dfrac{-e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

(C) $\dfrac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ (D) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

11. The values of x for which the rate of increase of $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 7$ is thrice the rate of increase of x, are :

(A) $-3, -\dfrac{1}{3}$ (B) $3, -\dfrac{1}{3}$

(C) $3, \dfrac{1}{3}$ (D) $-3, \dfrac{1}{3}$

12. If $\int_0^1 (9x^2 - 4x - 2k)\,dx = 0$, then the value of 'k' is :

(A) 1 (B) 0

(C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $-\dfrac{1}{2}$

13. $\int \left[\frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2} \right] dx$ बराबर है :

(A) $\frac{x}{\log x} + C$

(B) $x^2 \log x + C$

(C) $\frac{1}{\log x} + C$

(D) $\frac{-1}{(\log x)^2} + C$

14. यदि $y = \log \sqrt{\tan x}$ है, तो $x = \frac{\pi}{4}$ पर $\frac{dy}{dx}$ का मान है :

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(B) 0

(C) 1

(D) $\frac{1}{2}$

15. यदि सदिश $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \lambda\hat{i} + \hat{j}$ परस्पर लंबवत हैं, तो λ का मान है :

(A) 3

(B) – 3

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $-\frac{2}{3}$

16. यदि $\int_0^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx = k \log 3$ है, तो k का मान है :

(A) 4

(B) – 2

(C) – 4

(D) 2

17. यदि दो घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र हैं, तो निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सही ***नहीं*** है ?

(A) $\bar{A}$ तथा B स्वतंत्र हैं।

(B) स्वतंत्र होना यह नहीं दर्शाता कि घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं।

(C) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = [1 - P(\bar{A})]\ [1 - P(\bar{B})]$

(D) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = [1 - P(A)]\ [1 - P(B)]$

13. $\int \left[\frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2} \right] dx$ is equal to :

(A) $\frac{x}{\log x} + C$

(B) $x^2 \log x + C$

(C) $\frac{1}{\log x} + C$

(D) $\frac{-1}{(\log x)^2} + C$

14. If $y = \log \sqrt{\tan x}$, then the value of $\frac{dy}{dx}$ at $x = \frac{\pi}{4}$ is :

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(B) 0

(C) 1

(D) $\frac{1}{2}$

15. If vectors $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ and $\vec{b} = \lambda\hat{i} + \hat{j}$ are perpendicular to each other, then the value of λ is :

(A) 3

(B) – 3

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $-\frac{2}{3}$

16. If $\int_0^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx = k \log 3$, then the value of k is :

(A) 4

(B) – 2

(C) – 4

(D) 2

17. If two events A and B are independent, then which of the following statements is ***not*** correct ?

(A) $\bar{A}$ and B are independent.

(B) Being independent does not indicate that they are mutually exclusive.

(C) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = [1 - P(\bar{A})]\ [1 - P(\bar{B})]$.

(D) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = [1 - P(A)]\ [1 - P(B)]$.

18. यदि A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तथा $P(A) = 0{\cdot}45$ और $P(A \cup B) = 0{\cdot}5$ है, तो P(B) बराबर है :

(A) $\frac{1}{29}$ (B) $\frac{10}{11}$

(C) $\frac{10}{29}$ (D) $\frac{1}{11}$

*प्रश्न संख्या **19** और **20** अभिकथन एवं तर्क आधारित प्रश्न हैं । दो कथन दिए गए हैं जिनमें एक को अभिकथन (A) तथा दूसरे को तर्क (R) द्वारा अंकित किया गया है । इन प्रश्नों के सही उत्तर नीचे दिए गए कोडों (A), (B), (C) और (D) में से चुनकर दीजिए ।*

(A) अभिकथन (A) और तर्क (R) दोनों सही हैं और तर्क (R), अभिकथन (A) की सही व्याख्या करता है ।

(B) अभिकथन (A) और तर्क (R) दोनों सही हैं, परन्तु तर्क (R), अभिकथन (A) की सही व्याख्या ***नहीं*** करता है ।

(C) अभिकथन (A) सही है, परन्तु तर्क (R) ग़लत है ।

(D) अभिकथन (A) ग़लत है, परन्तु तर्क (R) सही है ।

19. *अभिकथन (A) :* माना R एक संबंध है जो समुच्चय A पर है, जहाँ A उस स्कूल की लाइब्रेरी की सभी पुस्तकों का समुच्चय है, तथा संबंध R इस प्रकार परिभाषित है कि $R = \{(x, y) : x, y \in A, x$ तथा y के पृष्ठ समान हैं$\}$ तथा समुच्चय A पर एक अन्य संबंध S इस प्रकार है कि $S = \{(p, q) : p$ तथा q गणित की पुस्तकें हैं$\}$ । $R \cap S \neq \phi$ भी प्रदत्त है । तो $R \cap S$ एक तुल्यता संबंध है ।

तर्क (R) : किसी समुच्चय पर दो तुल्यता संबंधों का प्रतिच्छेदन उस समुच्चय पर एक तुल्यता संबंध होता है ।

20. *अभिकथन (A) :* बिंदु A(6, – 7, 0), B(16, –19, – 4) तथा C(1, – 1, 2) संरेखी हैं ।

तर्क (R) : तीन बिंदु A, B तथा C संरेखी होते हैं, जब बिंदु C बिंदु A तथा B को मिलाने वाली रेखाखण्ड का मध्य-बिंदु हो ।

18. If A and B are independent events such that $P(A) = 0{\cdot}45$ and $P(A \cup B) = 0{\cdot}5$, then P(B) is equal to :

(A) $\frac{1}{29}$ (B) $\frac{10}{11}$

(C) $\frac{10}{29}$ (D) $\frac{1}{11}$

*Questions number **19** and **20** are Assertion and Reason based questions. Two statements are given, one labelled Assertion (A) and the other labelled Reason (R). Select the correct answer from the codes (A), (B), (C) and (D) as given below.*

(A) Both Assertion (A) and Reason (R) are true and Reason (R) is the correct explanation of the Assertion (A).

(B) Both Assertion (A) and Reason (R) are true, but Reason (R) is ***not*** the correct explanation of the Assertion (A).

(C) Assertion (A) is true, but Reason (R) is false.

(D) Assertion (A) is false, but Reason (R) is true.

19. *Assertion (A) :* Let R be a relation on set A of all books in a school library given by $R = \{(x, y) : x, y \in A$, x and y have the same number of pages$\}$ and S is a relation on set A from the same library such that $S = \{(p, q) : p$ and q are Mathematics books$\}$. Also, $R \cap S \neq \phi$. Then, $R \cap S$ is an equivalence relation.

Reason (R) : The intersection of two equivalence relations on a set is an equivalence relation on the set.

20. *Assertion (A) :* Points A(6, – 7, 0), B(16, –19, – 4) and C(1, – 1, 2) are collinear.

Reason (R) : Three points A, B and C are collinear, when point C is the mid-point of line segment joining points A and B.

खण्ड ख

इस खण्ड में अति लघु-उत्तरीय (VSA) प्रकार के 5 प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के 2 अंक हैं।

21. निम्नलिखित आव्यूह समीकरण को x तथा y के लिए हल कीजिए :

$$\begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} x \\ 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -20 \end{bmatrix}$$

22. (क) यदि $f(x) = \begin{cases} 2, & x \le 3 \\ ax+b, & 3 < x < 5 \\ 5, & x \ge 5 \end{cases}$ एक संतत फलन है, तो a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।

अथवा

(ख) यदि $2y^3 + y = 2x$ है, तो दर्शाइए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-48y}{(6y^2+1)^3}.$$

23. विद्यार्थी कक्षा के नोटिस बोर्ड पर एक ग्राफ शीट पर थंब पिन लगाने का प्रयत्न कर रहे हैं। थंब पिनों के समुच्चय A पर संबंध R इस प्रकार परिभाषित किया गया है :

R = {(P, Q) : P, Q ∈ A तथा P तथा Q के बीच की दूरी 3 cm से कम है}

ज्ञात कीजिए कि क्या R एक तुल्यता संबंध है।

24. एक LPP के लिए व्यवरोधों $2x + y \le 70$, $x + y \le 40$, $x, y \ge 0$ के लिए ग्राफ पेपर पर सुसंगत क्षेत्र को छायांकित कीजिए तथा कोनीय बिंदुओं के निर्देशांक लिखिए।

25. (क) एक बक्से में 1 से 22 तक की संख्याओं से अंकित कार्ड हैं। बक्से में से बिना प्रतिस्थापना के दो कार्ड एक साथ निकाल कर उन पर लिखी संख्याएँ नोट की गईं। इसकी प्रायिकता क्या है कि दोनों कार्डों की संख्याएँ सम हैं ?

अथवा

(ख) यदि $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ तथा $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ है, तो $P(\bar{A}/\bar{B})$ ज्ञात कीजिए।

SECTION B

This section comprises 5 Very Short Answer (VSA) type questions of 2 marks each.

21. Solve the matrix equation for x and y.

$$\begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} x \\ 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -20 \end{bmatrix}$$

22. (a) Determine a and b if f(x) is a continuous function, where

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \le 3 \\ ax + b, & 3 < x < 5 \\ 5, & x \ge 5 \end{cases}$$

OR

(b) If $2y^3 + y = 2x$, then show $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-48y}{(6y^2+1)^3}$.

23. Students are trying to fix thumb pins on a graph sheet on the class notice board. A relation R is defined on the set A of thumb pins as

$$R = \{(P, Q) : P, Q \in A \text{ and distance between P and Q is less than 3 cm}\}$$

Determine if R is an equivalence relation.

24. For an LPP with constraints

$$2x + y \le 70$$
$$x + y \le 40$$
$$x, y \ge 0,$$

shade the feasible region on the graph and write the coordinates of its corner points.

25. (a) A box contains cards numbered 1 to 22. Two cards are drawn simultaneously without replacement and their numbers are noted. What is the probability that both numbers are even ?

OR

(b) If $P(A) = \dfrac{3}{8}$, $P(B) = \dfrac{1}{2}$ and $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$, find $P(\bar{A}/\bar{B})$.

खण्ड ग

इस खण्ड में लघु-उत्तरीय (SA) प्रकार के 6 प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के 3 अंक हैं।

26. (क) यदि R, प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N पर इस प्रकार परिभाषित संबंध है कि

$$R = \{(x, y) : x, y \in N, x + 2y = 25\},$$

तो संबंध R का प्रांत व परिसर ज्ञात कीजिए। यह भी ज्ञात कीजिए कि क्या यह एक तुल्यता संबंध है।

अथवा

(ख) ज्ञात कीजिए कि क्या फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, जो कि $f(x) = 2x^3 - 7, \forall x \in \mathbb{R}$ (वास्तविक संख्याएँ) द्वारा परिभाषित है, एकैकी आच्छादी फलन है या नहीं।

27. $y = e^{\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए, अत: दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$.

28. 'a' तथा 'b' के मान ज्ञात कीजिए, यदि $y = \frac{ax - b}{(x-1)(x-4)}$ का क्रांतिक बिंदु (3, 1) है।

29. (क) एक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु (1, –1, 2) से होकर जाती है तथा x-अक्ष के समांतर है। इस रेखा की एक अन्य रेखा $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$ से न्यूनतम दूरी भी ज्ञात कीजिए।

अथवा

(ख) यदि बिंदुओं A, B, C तथा D के निर्देशांक क्रमश: (3, – 4, 2), (–1, – 2, 0), (4, 1, –1) तथा (4, 0, 5) हैं, तो रेखाओं AC और BD के समीकरण ज्ञात कीजिए और दर्शाइए कि रेखाएँ AC तथा BD परस्पर लंबवत हैं।

SECTION C

This section comprises 6 Short Answer (SA) type questions of 3 marks each.

26. (a) If R is a relation on set of natural numbers N such that

$$R = \{(x, y) : x, y \in N, x + 2y = 25\},$$

then find the Domain and Range of the relation R. Also, determine if it is an equivalence relation.

OR

(b) Determine whether the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $f(x) = 2x^3 - 7$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ (Real numbers) is bijective or not.

27. Differentiate $y = e^{\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}}$ with respect to x and hence show that $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$.

28. Find the values of 'a' and 'b', if $y = \frac{ax - b}{(x-1)(x-4)}$ has a critical point (3, 1).

29. (a) Find the equation of a line passing through the point (1, –1, 2) and parallel to x-axis. Also, find the shortest distance between this line and the line $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$.

OR

(b) Find the equations of the lines AC and BD, if coordinates of points A, B, C and D respectively, are (3, – 4, 2), (–1, – 2, 0), (4, 1, –1) and (4, 0, 5). Show that the lines AC and BD are perpendicular to each other.

30. (क) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

अथवा

(ख) xy-तल में दो रेखाएँ, समीकरणों $5x - 7y - 2 = 0$ तथा $7x - 5y - 3 = 0$ द्वारा निरूपित की गई हैं। आव्यूह विधि से इन रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिंदु ज्ञात कीजिए।

31. निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को ग्राफ द्वारा हल कीजिए :

व्यवरोधों

$$x + y \geq 3$$
$$x + 2y \geq 4$$
$$x, y \geq 0$$

के अंतर्गत $Z = 4x + y$ का न्यूनतमीकरण करना।

खण्ड घ

इस खण्ड में 4 दीर्घ-उत्तरीय (LA) प्रकार के प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के 5 अंक हैं।

32. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} \, dx$$

33. (क) समाकलन विधि के उपयोग से, वक्र $y = x^2$ तथा रेखा $y = 2$ के द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अथवा

(ख) समाकलन विधि के उपयोग से, वक्र $9x^2 + 16y^2 = 144$ तथा रेखाओं $x = 2$ तथा $x = -2$ के द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

30. (a) Express the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ as the sum of a symmetric matrix and a skew symmetric matrix.

OR

(b) Two lines are represented by equations $5x - 7y - 2 = 0$ and $7x - 5y - 3 = 0$ in the xy-plane. Using matrix method, find their point of intersection.

31. Solve the following Linear Programming Problem graphically :

Minimize $Z = 4x + y$

subject to

$$x + y \geq 3$$

$$x + 2y \geq 4$$

$$x, y \geq 0.$$

SECTION D

This section comprises 4 Long Answer (LA) type questions of 5 marks each.

32. Evaluate :

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} \, dx$$

33. (a) Using integration, find the area bounded by the curve $y = x^2$ and the line $y = 2$.

OR

(b) Using integration, find the area bounded by the curve $9x^2 + 16y^2 = 144$ and the lines $x = 2$, $x = -2$.

34. अवकल समीकरण $x^2\, dy + y\,(x + y)\, dx = 0$ का हल ज्ञात कीजिए, दिया गया है कि जब $x = 1$ है, तो $y = 1$ है।

35. (क) माना $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ तीन शून्येतर सदिश इस प्रकार हैं कि $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ तथा $\vec{\beta} \times \vec{\gamma} = \vec{\alpha}$ है। दर्शाइए कि α, β, γ परस्पर लंबवत सदिश इस प्रकार हैं कि $|\vec{\beta}| = 1$ तथा $|\vec{\alpha}| = |\vec{\gamma}|$ है।

सदिश $\vec{\beta}$ पर $\vec{\alpha}$ का प्रक्षेपण ज्ञात कीजिए। अपने उत्तर के समर्थन में कारण दीजिए।

अथवा

(ख) यदि बिंदु A(3, –1, 2), B(6, – 3, 6), C(4, – 3, 1) तथा D(1, –1, – 3) एक चतुर्भुज ABCD के शीर्ष हैं, तो इन बिंदुओं A, B, C तथा D के स्थिति सदिश लिखिए तथा दर्शाइए कि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

खण्ड ङ

इस खण्ड में 3 प्रकरण-अध्ययन आधारित प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के 4 अंक हैं।

प्रकरण अध्ययन – 1

36. एक स्कूल के घनाभाकार आकार के तरणताल की चौड़ाई रेखा $\dfrac{-x+2}{-5} = y = z - 3$ द्वारा निरूपित है। दो विद्यार्थी A तथा B तरणताल में इसकी लंबाई की दिशा में तैर रहे हैं।
उपर्युक्त सूचना के आधार पर, निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) यदि विद्यार्थी A का रास्ता रेखा $\dfrac{x+5}{1} = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{z-6}{-3p}$ द्वारा निरूपित है, तो p का मान ज्ञात कीजिए। *1*

(ii) विद्यार्थी B के तैरने के रास्ते का सदिश समीकरण लिखिए, यदि वह विद्यार्थी A की दिशा के समांतर तैर रहा है और वह किसी समय बिंदु (2, 4, –1) से होकर जाता है। *1*

34. Solve the differential equation $x^2\, dy + y\,(x + y)\, dx = 0$, given that $y = 1$ when $x = 1$.

35. (a) Let $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ be three non-zero vectors, such that $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ and $\vec{\beta} \times \vec{\gamma} = \vec{\alpha}$. Show that α, β, γ are mutually perpendicular vectors such that $|\vec{\beta}| = 1$ and $|\vec{\alpha}| = |\vec{\gamma}|$.

Find projection of vector $\vec{\alpha}$ on $\vec{\beta}$. Give reasons to support your answer.

OR

(b) If points A(3, –1, 2), B(6, – 3, 6), C(4, – 3, 1) and D(1, –1, – 3) are vertices of a quadrilateral ABCD, write the position vectors of A, B, C and D and show that ABCD represents a parallelogram. Also, find the area of the parallelogram ABCD.

SECTION E

This section comprises 3 case study based questions of 4 marks each.

Case Study – 1

36. In a school, the swimming pool is shaped as a cuboid, and the breadth of the pool is represented by line $\frac{-x+2}{-5} = y = z - 3$. Two students A and B are swimming along the length of the pool.

Based on the above information, answer the following questions :

(i) If the path of student A is represented by line $\frac{x+5}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-6}{-3p}$, find the value of p. *1*

(ii) Write the vector equation of the path of student B swimming parallel to the path of student A, if at a certain instant he passes through the point with coordinates (2, 4, –1). *1*

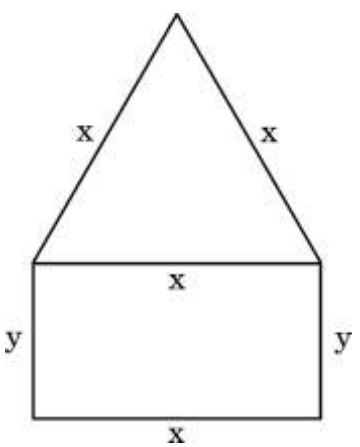
(iii) (क) (2, 4, –1) से विद्यार्थी A के पथ पर डाले गए लंब का पाद ज्ञात कीजिए। *2*

अथवा

(iii) (ख) यदि एक पक्षी तरणताल के ऊपर से रेखा $\frac{x+4}{2} = \frac{y+3}{8} = \frac{z-5}{-18}$ के रास्ते पर उड़ता है, तो इस रास्ते और विद्यार्थी A के रास्ते के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। *2*

प्रकरण अध्ययन – 2

37. एक खिड़की x m लंबाई तथा y m चौड़ाई के आयत के आकार की है जिसकी लंबाई के ऊपर एक समबाहु त्रिभुज है।



उपर्युक्त सूचना के आधार पर, निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) यदि खिड़की का परिमाप 18 m है, तो x तथा y के बीच संबंध लिखिए। *1*

(ii) ऊपर (i) में प्राप्त संबंध से खिड़की के क्षेत्रफल का केवल x के फलन के रूप में एक व्यंजक लिखिए। *1*

(iii) (क) आयत की वह विमाएँ ज्ञात कीजिए जिससे खिड़की में से अधिकतम रोशनी आ सके। *2*

अथवा

(iii) (ख) यदि यह दिया गया है कि खिड़की का क्षेत्रफल 100 m^2 है, तो x के पदों में इसके परिमाप का व्यंजक ज्ञात कीजिए। *2*

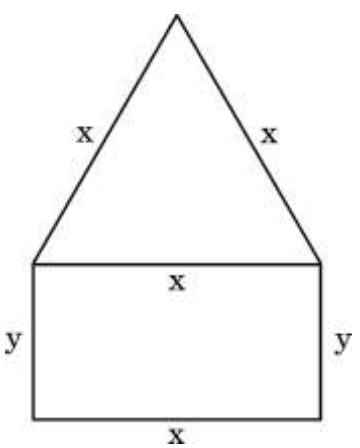
(iii) (a) Find the foot of the perpendicular drawn from (2, 4, –1) to the path represented by student A. *2*

OR

(iii) (b) If a bird flies across the top of the swimming pool with its path represented by $\frac{x+4}{2} = \frac{y+3}{8} = \frac{z-5}{-18}$, then find the shortest distance between its path and the path of student A. *2*

Case Study – 2

37. A window is in the form of a rectangle of length x and breadth y (in metres), surmounted by an equilateral triangle on its length.



Based on the above information, answer the following questions :

(i) If the perimeter of the window is 18 m, write the relation between x and y. *1*

(ii) From (i), write an expression for the area of the window as a function of x only. *1*

(iii) (a) Find the dimensions of the rectangle that will allow the maximum light through the window. *2*

OR

(iii) (b) If it is given that the area of the window is 100 m^2, then find the expression for its perimeter in terms of x. *2*

प्रकरण अध्ययन – 3

38. एक संस्था को भवन निर्माण कम्पनी का चयन करना है जो विभिन्न शहरों में भवन निर्माण का कार्य कर सके। तीन कम्पनियों X, Y तथा Z को शॉर्टलिस्ट किया गया तथा उनको चुनने की प्रायिकताएँ क्रमश: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ तथा $\frac{4}{9}$ हैं। यह पाया गया कि इन कम्पनियों द्वारा खराब निर्माण गुणवत्ता देने की प्रायिकताएँ क्रमश: 20%, 40% तथा 30% हैं।

उपर्युक्त सूचना के आधार पर, निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) यदि निर्मित भवन मज़बूत पाया गया हो, तो क्या प्रायिकता है कि भवन निर्माण अनुबंध का काम कम्पनी X को दिया गया था ? *2*

(ii) यदि नव निर्मित भवन का एक भाग गिर जाता है, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि ऐसा कम्पनी Y अथवा Z को चुनने के कारण हुआ हो ? *2*

Case Study – 3

38. An organisation needs to select a building construction company to make houses in cities. Three companies X, Y and Z are short-listed with the probability of their selection being $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ and $\frac{4}{9}$ respectively. It was found that there were 20%, 40% and 30% chances respectively, of delivering poor construction quality.

Based on the above information, answer the following questions :

(i) If the building constructed was found to be strong, then what is the probability that the construction contract was given to the company X ? *2*

(ii) If a part of the newly constructed building falls off, then what is the probability that it was due to the selection of company Y or Z ? *2*